実践例＜6＞ 関 数 記 号

三島郡寺泊町寺泊中学校教諭　村 上 敏 夫

1. 指導体系に基づいた本題材のねらいと問題点

一般に，数学において記号の設定は，その事項に関する考え方を自由にし広範にして統一化するばかりでなく，新しい処理の手続きを産み出す。関数においてもfなどの記号が用いられ，表現を明確化し簡素化し処理を容易にして，関数をより深く理解するのに役立っている。

この共同研究の指導体系では，一年生で関数を2つの集合間の一意対応とおさえ，その表わし方としてベン図，表，グラフ，式を学習し，特に式の学習で関数は式表示できるものとそうでないものがあることが指導されている。本題材のねらいはこの一年生の学習の上に立って，関数記号fなどを導入することにより，すべての関数をはっきりと，しかも簡けつに表わし，容易に処理することができるようにし，関数についての理解をいっそう深めるとともに，その認識を高め，いろいろの事がらを関数のもとに統一的に眺めていくことができるようにすることである。

さて本題材をこの共同研究の指導体系に基づいて実際に授業をしようとするとき，次のような問題が考えられる。

(1) 関数は集合Xから集合Yへの一意対応であると一般的に定義されるが，関数の定義をこのような一般的な定義と，式表示できるような個々の関数の具体的な定義との指導上の関連をどうしたらよいか。それに関係して，関数fと関数値$f(x)$の区別をどのように指導したらよいか。

(2) 関数記号は一般にfが用いられているが，他の文字g，hなども用いられておるので，記号がfだけに固定しないようにしなければならないが，どの程度までにとどめるか。

(3) 記号を導入するとき，たとえば，ベン図などで，2つの集合間の一意対応を提示して，その一意対応をfとして記号を導入するか，操作（たとえば，ブラックボックスの利用）を記号化してfを導入するのがよいか。

(4) 関数記号の指導時期については，そのねらいできまるだろうが，1年生の関数の表わし方のまとめとして指導した方が自然ではないだろうか。

2. 指 導 内 容

(1) 指導目標　関数を表わすのにfなどの記号が用いられることを知り，関数についての理解をいっそう深めるとともに，それを用いる能力を伸ばす。

(2) 指導計画（4時間）

§1 関数を表わす記号f（g，h）　（2時間）

関数を表わすのに用いる記号fなどの意味について理解するとともに，関数を　$X \xrightarrow{f} Y$，（f：X→Y）　と表わされるようにする。

§2 関数の値を表わす記号$f(a)$　（1時間）

集合Xの要素aに対して関数fで対応する集合Yの要素を$f(a)$とかくことを知り，$f(a)$が自由に求められるようにする。

§3　関数の値を表わす記号 $f(x)$　　　　（１時間）

$f(x)$ は集合Xの任意の要素 x の関数値であることを理解するとともに，関数 f と関数値 $f(x)$ が区別できるようにする。

(3)　指導内容

§1　関数を表わす記号 f（g，h）

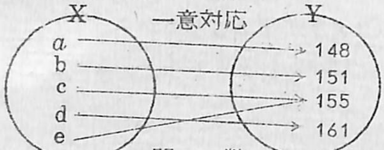
。式，表，ベン図，グラフで表わされた変数 x から y への対応で関数であるものを選ぶ。この学習をとおして，関数が集合Xから集合Yへの一意対応であることを確認する。

。選び出した関数のうちから，式表示できないものと，式表示できるものを例として，関数記号を導入する。

例１

生徒（x）	a	b	c	d	e
身長（y）	148	152	155	161	155

生徒の集合Xから身長の集合Yへの対応は一意対応であるから関数である。これを記号を用いて次のように表わすことにする。



関　　数

$$\{\text{生徒}\,x\} \xrightarrow{f} \{\text{身長}\,y\}$$

$$X \xrightarrow{f} Y$$

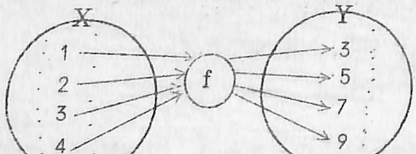
「例１では式表示できない関数で一意対応を記号でおきかえる」

「例２の指導のあとで例１の対応の規則をことばで表わし，関数に対する理解を深める。たとえば，対応の規則は身体検査表」

> このように関数記号を用いて表わすことにすれば，どんな関数もはっきりと簡けつに表わすことができる。

例２　　$y = 2x + 1$

この式で表わされた集合Xから集合Yへの対応も一意対応であるから，これも記号を用いて次のように表わすことができる。



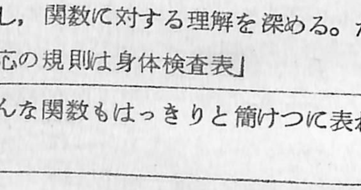
$$X \longrightarrow Y$$

$$(x \xrightarrow{f} 2x+1)$$

「例２の場合の記号 f は，一意対応を表わしているが，同時に集合Xの要素 x を２倍して１を加えるという対応の規則，すなわち，集合Xの各要素に集合Yの要素を対応させる働きを表わしていることを理解させ，式表示できない関数の対応の規則をことばで表わしてみる」

例３　歯数１０枚，２０枚，３０枚の歯車A，B，Cが図のようにかみあって回転している。

次の問いに答えよ。



問１　変数を３つ選びそれぞれを x，y，z とせよ。

問２　xからyへの対応，yからzへの対応，xからzへの対応はそれぞれ関数か。関数ならば記号を用いて表わせ。

〔解〕　変数　{Ａの回転数x}＝Ｘ
{Ｂ　〃　y}＝Ｙ
{Ｃ　〃　z}＝Ｚ

$X \xrightarrow{f} Y$
$(x \xrightarrow{f} \frac{1}{2}x)$
$Y \xrightarrow{g} Z$
$(y \xrightarrow{g} \frac{2}{3}y)$
$X \xrightarrow{h} Z$
$(x \xrightarrow{h} \frac{1}{3}x)$

x	1	2	3	4	…………
y	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	…………
y	1	2	3	4	…………
z	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	2	$2\frac{2}{3}$	…………
x	1	2	3	4	…………
z	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$1\frac{1}{3}$	…………

「例３では，関数を表わす記号がfだけに固定しないように，１つの問題でいくつかの関数関係をもつ教材で，f以外にg，hなどの文字を用いて関数を表わすことを理解させる。」

このように同時にいくつかの関数を表わすときは，変数をx，y，zとちがう文字を用いて表わすように，関数もfのほかにg，hなどを用いて表わす。

§2　関数の値を表わす記号f（a）

例１　長さ２０cmのローソクに火をつけたら，１分間に２cmずつもえた。これから変数を考え，それぞれの対応を考え，関数ならば記号を用いて表わせ。

(解)　変数　{時間x}＝Ｘ，{もえた長さy}＝Ｙ，{残っている長さz}＝Ｚ

$X \xrightarrow{f} Y$
$(x \xrightarrow{f} 2x)$
$Y \xrightarrow{g} Z$
$(y \xrightarrow{g} 20-y)$
$X \xrightarrow{h} Z$
$(x \xrightarrow{h} 20-2x)$

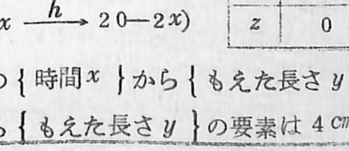
x	0	1	2	…………	9	10
y	0	2	4	…………	18	20
y	0	1	2	…………	19	20
z	0	19	18	…………	1	0
x	0	1	2	…………	9	10
z	0	18	16	…………	2	0

例１の{時間x}から{もえた長さy}への対応は関数であり，{時間x}の１つの要素２分に対応する{もえた長さy}の要素は４cmであるから，これを次のように表わす。

{時間x}　⟶　{もえた長さy}
（２分）　⟶　（４cm）
$f(2)=4$

説明にならって$f(4)$，$g(7)$，$h(5)$などを求めることにより，$f(\ )$の意味の理解をさせる。

集合Ｘの要素がaのとき，関数fによってaに対応する集合Ｙの要素を$f(a)$とかく



「練習問題として，ベン図，グラフ，表，式で対応が表わされた関数の$f(a)$を求め，さらに文章題の$f(a)$を求めることにより，$f(\ )$の意味の理解の定着をはかる。

§3　関数の値を表わす記号$f(x)$

例1　① $X \xrightarrow{f} Y$　② $Y \xrightarrow{g} Z$　③ $X \xrightarrow{h} Z$

$(x \xrightarrow{f} 2x)$　$(y \xrightarrow{g} 20-y)$　$(x \xrightarrow{h} 20-2x)$

$f(x)$を求めよ　$g(y)$を求めよ　$h(x)$を求めよ

（解）　$f(x)=2x$　$g(y)=20-y$　$h(x)=20-2x$

集合Xの任意の要素をxとしたとき，関数fによってきまる集合Yの要素yは$f(x)$と表わされ，これを関数の値（関数値）という。

例2　やかんに20℃の水が入っている。これを火にかけたら，1分間に温度が3度ずつ上った。これから変数を2つ見いだして，それらを対応させよ。

（解）　変数　$\{$時間$x\}=X$　$\{$水の温度$y\}=Y$

$X \xrightarrow{f} Y$

$(x \xrightarrow{f} 3x+20)$

$f(x)=3x+20$

$f: y=3x+20$

x	0	1	2	…………
y	20	23	26	…………

例1では，式表示できる関数のXの任意の要素に対する関数値の求め方の指導 例2では，関数fと関数値$f(x)$の区別を指導することをねらった。すなわち， $f(x)$はXの任意の要素xの関数値であり，y，$3x+20$もXの任意の要素xの関数値である。 関数はXからYへの一意対応fであり，Xの要素にYの要素を対応させる規則fである。 $y=3x+20$は，XからYへの一意対応の規則を表わしているとみれば，関数である。しかし，ここでは$f: y=3x+20$と表わし，関数値y，$3x+20$と区別し，そして，続いて学習する1次関数の定義と矛盾しないようにする。 （1次関数の定義　集合Xの任意の要素xから集合Yの要素yへの対応が$y=ax+b$で表わされるとき，この対応を1次関数といい，1次関数$f: y=ax+b$で表わす。）

関数記号のまとめとして，ねらいにそったいくつかの問題をやり，理解の定着をはかる。

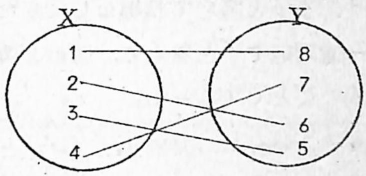
3. 結果の考察

(1)　授業における生徒の反応と事後調査からみて

。生徒の関数についての理解の程度について，本題材の指導後に「これまでに学習した関数について知っていることを書け」で調べてみた。問いかけに無理があったが，生徒は案外よく書いてくれた。その中の1つに次のような結果が得られた。

。関数を一意対応と答えた者　37人　（生徒数は41人） 。一意対応と答え，一意対応の説明を1対1，多対1対応とした者　19人 。一意対応と答え，一意対応をXの1つの値に対してYの値がただ1とおりにきまる対応と書いた者　8人　（1対1，多対1対応としたうえで説明したものも含む）

また，授業中では，抽象的に表わされた一意対応を教師の発問に対して，いろいろな事象にあてはめて具体的に説明してくれた。その1例として



T．この対応からなにか考えられないか。

P_1　Xは生徒の出席番号，Yは二学期の欠席日数

P_2　Xは生徒の出席番号，Yは１０点満点のテストの点

これらのことから，関数を一意対応であると生徒は理解したと考えられる。また，簡単な事象ににについては関数的な見方ができるようになったと考えてよいであろう。

。次に記号をfだけに固定しないように指導したわけだが，授業における生徒の反応の１つの例として，§2の例1のときの生徒の動きをみると次のようであった。

T．XからYへの対応は	T．YからZへの対応は	T．XからZへの対応は
P．一意対応だから関数	P．一意対応だから関数	P．一意対応だから関数
T．どう表わすか	T．どう表わすか	T．どう表わすか
P．$X \xrightarrow{f} Y$と表わす	P．$Y \xrightarrow{g} Z$と表わす	P．$Y \xrightarrow{h} Z$と表わす
T．対応の規則は	T．対応の規則は	T．対応の規則は
P．$(x \xrightarrow{f} 2x)$	P．$(y \xrightarrow{g} 20-y)$	P．$(x \xrightarrow{h} 20-2x)$

問題　あるクラスで身長，体重，胸囲の測定をした。$\{$生徒$x\}$＝X，$\{$身長$y\}$＝Y，$\{$体重$w\}$＝W，$\{$胸囲$z\}$＝Zとしたとき，生徒と身長，生徒と体重，生徒と胸囲の対応について次の問いに答えよ。　　（生徒数４１）　　正答数

①　それぞれの対応は関数か。　　４１

②　関数であるならば，その関係を記号で表わせ。

$X \xrightarrow{f} Y$　　４１

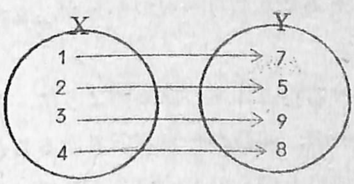
$X \xrightarrow{g} W$　　３８

$X \xrightarrow{h} Z$　　３８

指導のねらいは，この結果から見るならば達せられたと考えられる。このことは，例題に，同時にいくつかの関数関係のある問題をとりあげたためと考えられる。

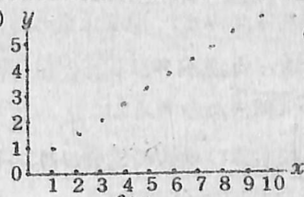
。関数値$f(a)$を求める問題は簡単なのでよくできたが，関数値$f(x)$を求める問題については，次のような問題で，表のような結果が得られた。

①



$f(3)$

②



$f(6)$

③　１日の昼の長さをx時間としたときの夜の長さ。

$f(x)$

④　$f:y=5x-3$

$f(-2)$

⑤

x	△ABC	△DEF	△GHI	△PQR
y	4	6	8	10

f(△DEF)

問題番号	①	②	③	④	⑤
正答数	40	37	19	29	39

。関数を一意対応で定義し，関数fと関数値$f(x)$とを区別すべきであると考えて指導をしてきた。授業における生徒の反応は，関数とは，という問いに対して，一意対応やfと答えて，関数と関数値の区別ができていたようだが，次の問題に対する反応結果は表のごとくであった。

問題　集合Xの任意の要素をxとしたとき，（イ）によってきまる集合Yの要素yは（ロ）と表わされこれを（ハ）という。空らんをうめて正しい文にせよ。

問題番号	イ	ロ	ハ	全部できた数
正答数	12	7	2	2

このように，個々の具体的な問題では，$f(x)$とfを区別できた生徒でも，上記のような，抽象化された数学の用語や説明になると，しっかりと区別することができない生徒が多く出たことより，指導のあり方について考えなければならないと思う。また，式表示できる関数における関数fと関数値$f(x)$の区別の指導は，§3 の例2で，次のようにした。

$X \xrightarrow{f} Y$
$(x \xrightarrow{f} 3x+20)$
$f(x)=3x+20$
$f: y=3x+20$

Xの任意の要素xの関数値は，$f(x)$，$3x+20$，yである。すなわち，Xの任意の要素xに対し，関数fによってきまる集合Yの要素である。
関数はXからYへの一意対応，すなわち，Xの各要素にYの要素をただ1つ対応させる規則である。

さて，$y=3x+20$はXからYへの一意対応の規則を表わしているとみれるから関数であるといえる。しかし，この実践例では，これを　$f: y=3x+20$　と表わし，関数値y，$3x+20$と区別し，式表示できる個々の関数の定義を対応の規則で説明できるようにした。

これは，関数を，$y=3x+20$と表わした場合，生徒に関数と関数値の区別に混乱を生ずることをさけようとしたためであるが，この点については，関数の式表示の指導と定義とに関連し，今後さらに多数の実践研究が期待される。

(3)　反省と今後に残された問題

個々の具体的な問題は身近な事象を例としてとり上げたので，大部分の生徒が理解し，学習に興味を示したが，事後調査での生徒の要望では，「もっと多くいろいろな問題をしてもらいたい」とあった。実際に授業を行なってみて，指導体系のねらいにあった適切な教材が見つからず，また，意識過剰で設問に無理があった点が多かったと反省させられた。

また，本題材を指導した結果から考えて，この共同研究における指導体系の試案のように，関数記号の指導を2年生の関数指導の最初に位置づけ，そこでいま一度，関数が一意対応であることを確認し，関数f，関数値$f(x)$との区別を指導し，1次関数の指導にと続くのも一つの方法ではあるが，せっかく1年生で一意対応を関数と定義し，関数の表わし方として，表，グラフに続いて式の指導をするのだから，そこで関数の表わし方のまとめとして関数記号の指導をしたらどうかとも考えさせられた。この問題は今後の実践研究によらねばならない。